Correction du sujet de

Mathématiques du BTS 2006 Groupement B 1

Exercice 1

A. Résolution d'une équation différentielle

1. (E_0) : $y'' - 3y' - 4y = 0$
l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3r - 4 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ donc deux solutions réelles distinctes :
$r_1 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1, \quad r_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$
les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x}$.

2. $h(x) = x\,e^{-x}$ donc h est deux fois dérivable et pour tout réel x on a :
$h'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$
$h''(x) = -\,e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (-1 - 1 + x)\,e^{-x} = (-2 + x)\,e^{-x}$
$h''(x) - 3h'(x) - 4\,h(x) = (-2 + x)\,e^{-x} - 3(1 - x)\,e^{-x} - 4x\,e^{-x} = (-2 + x - 3 + 3x - 4x)e^{-x}$
$h''(x) - 3h'(x) - 4\,h(x) = -5\,e^{-x}$
donc h est bien solution de l'équation différentielle (E).

3. La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E^0) et de la solution particulière de (E) .
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc toutes les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par
$y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} + x\,e^{-x} = (A + x)\,e^{-x} + Be^{4x}$

4. f est une solution de l'équation différentielle (E) donc f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (A + x)\,e^{-x} + Be^{4x}$ où A et B sont deux constantes réelles à déterminer.
$f'(x) = e^{-x} - (A + x)\,e^{-x} + 4Be^{4x}$
$f(0) = 2 \Leftrightarrow A + B = 2$
$f'(0) = -1 \Leftrightarrow 1 - (A + 0) + 4B = -1 \Leftrightarrow -A + 4B = -2$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales
$f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$ est la fonction f définie par :
$f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$.

B . Etude locale d'une fonction

1. Développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$e^{t}=1+t+\frac{t^{2}}{2}+\frac{t^{3}}{3!}+t^{3}\varepsilon_{1}(t)\ \text{avec}\ \lim_{t\to 0}\varepsilon_{1}(t)=0$$

on en déduit :

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{6}+x^{3}\varepsilon_{3}(x)\quad avec\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_{2}(x)=0$$

$$xe^{-x}=x-x^{2}+\frac{x^{3}}{2}+x^{3}\varepsilon_{3}(x)\quad avec\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_{3}(x)=0$$

$$2e^{-x}=2-2x+x^{2}-\frac{x^{3}}{3}+2x^{3}\varepsilon_{2}(x)\quad avec\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_{2}(x)=0$$

$$f(x)=xe^{-x}+2e^{-x}=x-x^{2}+\frac{x^{3}}{2}+x^{3}\varepsilon_{3}(x)+2-2x+x^{2}-\frac{x^{3}}{3}+2x^{3}\varepsilon_{2}(x)$$

$$=2-x+\frac{x^{3}}{6}+x^{3}+x^{3}\underbrace{[\varepsilon_{3}(x)+2\varepsilon_{2}(x)]}_{\varepsilon(x)}\ avec\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

2. Equation de la tangente T :
Pour obtenir une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 il suffit de regarder le développement limité d'ordre 1 de *f* , l'équation de T est donc $y = 2 - x$

3. $f(x) - (2 - x)$ est équivalent à $x^3/6$ au voisinage de 0 donc la courbe C est au dessous de la tangente au point d'abscisse 0 au voisinage de 0 sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et au dessus sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

C.

1.

$$I=\int_{0}^{0,6}f(x)dx=\int_{0}^{0,6}(x+2)e^{-x}dx$$

$$\begin{cases}u'(x)=e^{-x}\Rightarrow u(x)=-e^{-x}\\ v(x)=x+2\Rightarrow v'(x)=1\end{cases}$$

$$I=\left[-(x+2)e^{-x}\right]_{0}^{0,6}-\int_{0}^{0,6}-e^{-x}dx$$

$$=\left[-2,6e^{-0,6}+2\right]-\left[e^{-x}\right]_{0}^{0,6}$$

$$=\left[-2,6e^{-0,6}+2\right]-\left[e^{-0,6}-1\right]=3-3,6e^{-0,6}$$

2. $I \simeq 1{,}024$

3. Le nombre I représente en unité d'aire l'aire du domaine plan délimité par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 0,6$

Exercice 2

A Ajustement affine.

1. a. b.

Rang de l'année : xi	Nombre de chaudières fabriquées par milliers : yi	xi²	yi²	xiyi
0	15,35	0,000	235,623	0,000
1	15,81	1,000	249,956	15,810
2	16,44	4,000	270,274	32,880
3	16,75	9,000	280,563	50,250
4	17,19	16,000	295,496	68,760
5	17,3	25,000	299,290	86,500
Totaux 15,000	98,840	55,000	1631,201	254,200
Moyenne 2,500	16,473	9,167	271,867	42,367
Variances et covariance		2,917	0,496	1,183
Ecarts -types		1,708	0,704	
Coefficient de corrélation linéaire			r =	0,984
Coefficients de la droite de régression de Y en X			a =	0,406
			b =	15,5

Pour comprendre les calculs : droite de régression , covariance , calculatrice statistique
La droite de régression (que l'on peut trouver à l'aide de la calculatrice) est donc :
$y = 0,406\, x + 15,5$.

2. Iil suffit de remplacer x par 7 dans l'équation $y = 0,406\, x + 15,5$ pour en déduire y soit :
$y = 0,406 \times 7 + 15,5 \simeq 18,30$ milliers de chaudières = 18 300 chaudières.

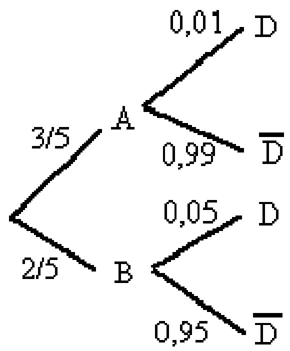
B. Probabilités conditionnelles

1.

Il y a 900 chaudières à cheminée sur un total de 1500 (900 + 600) chaudières donc :
p(A) = 900/1500 = 9/15 = 3/5 = 0,6
Il y a 600 chaudières à ventouse sur un total de 1500 chaudières donc :
p(B) = 600/1500 = 6/15 = 2/5 = 0,4
1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses :

p(D/A) = 1/100 = 0,01

5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses :
p(D/B) = 5/100 = 0,05



.

2. P(D ∩A) = P(D/A) ×P(A) = 0,01 ×0,6 = 0,006
P(D ∩B) = P(D/B) ×P(B) = 0,05 ×0,4 = 0,02
3. (D ∩A) ∩(D ∩B) = D ∩A ∩B = D ∩ ∅= ∅
donc les évènements (D ∩A) et (D ∩B) sont incompatibles, de plus
D = (D ∩A) ∪(D ∩B)
P(D) = P((D ∩A) ∪(D ∩B)) = P(D ∩A) + P(D ∩B) = 0,006 + 0,02 = 0,026
P($\overline{D}$) = 1 - P(D) = 0,974.

C. Loi normale

X suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3 , donc la variable aléatoire T définie par :

$$T = \frac{X - 15}{3}$$

suit une loi normale centrée réduite N(0 ; 1)

$$P(X \geq 10) = P(\frac{X - 15}{3} \geq \frac{10 - 15}{3}) = P(T \geq \frac{-5}{3})$$

$$P(X \geq 10) = 1 - \Pi(-5/3) = 1 - \left(1 - \Pi(5/3)\right) = \Pi(5/3)$$

$$P(X \geq 10) \approx \Pi(1,67) \approx 0,953$$

La probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit " amortie " est donc de 0,953.

D. Intervalle de confiance.

1. Sur l'échantillon des 100 chaudières 94 sont sans aucun défaut, donc on peut prendre comme estimation ponctuelle de p la fréquence des chaudières sans défaut sur cet échantillon soit : 94/100 = 0,94.

2. p est inconnue donc il faut utiliser une estimation ponctuelle de σ' =

$$\sqrt{\frac{p(1 - p)}{100}}$$

D'après le cours une estimation ponctuelle s de σ' est donnée par :

$$s = \sqrt{\frac{100}{100 - 1}} \times \sqrt{\frac{f(1 - f)}{100}} = \sqrt{\frac{f(1 - f)}{99}} = \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{99}}$$

$$s \approx 0,0239$$

F suit la loi normale N(p ; σ') on en déduit que la variable aléatoire Z définie par :

$Z = \frac{F - p}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite N(0 ; 1) .

Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95% revient à déterminer un nombre *a* tel que : p($F - a \le p \le F + a$) = 0,95.

$$p(-z \le Z \le z) = 0,95 \Leftrightarrow 2\Pi(z) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi(z) = 0,975$$

d'où $z = 1,96$

$$p(-1,96 \le Z \le 1,96) = 0,95$$

$$p(-1,96 \le \frac{F - p}{\sigma'} \le 1,96) = 0,95$$

$$p(-1,96\sigma' \le F - p \le 1,96\sigma') = 0,95$$

$$p(-1,96\sigma' \le p - F \le 1,96\sigma') = 0,95$$

$$p(F - 1,96\sigma' \le p \le F + 1,96\sigma') = 0,95$$

en prenant pour σ' son estimation ponctuelle s, on a : $a = 1,96 \times 0,0239 \simeq 0,047$

l'intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 % est :

[0,89 ; 0,99]

3. Non il n'y a aucune certitude.